ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК:519.8 DOI:10.35803/1694-5298.2022.2.1088-1092

А.Ж. Жолборсова[1], А.Н.Нурланбеков[2], М. Асанкулова[2]
[1]КГУ им. И. Арабаева, Бишкек, Кыргызская Республика
[2]Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызская Республика

A.J.Jolborsova[1], A.N. Nurlanbekov[2], M. Asankulova[2]
[1]KGU im.I.Arabaeva, Bishkek, Kyrgyz Republic
[2]Mathematics Institute of the NAS KR, Bishkek, Kyrgyz Republic
zholborsova76@mail.ru may_as@mail.ru

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕРА МАСТЕРСКИХ ФИРМЫ ПОД ОБОРУДОВАНИЯ

THE PROBLEM OF DETERMINING THE OPTIMUM SIZE WORKSHOP COMPANIES FOR EQUIPMENT

Арендалык курулуш аянтчасын тартуу менен жабдуулардын ар бир түрү үчүн мастерскойлордун оптималдуу өлчөмүн аныктоонун математикалык модели түзүлгөн. Курулуш аянтчасында орнотулган ар бир жабдуулар чыгарган продукциянын сатылышына жараша фирманын жалпы кирешесин аныктоочу функция - сызыктуу. Маселени чечүүнүн ыкмасы сунушталат. Сунушталган математикалык моделдин иштеши тесттик мисал менен көрсөтүлгөн.

Өзөк сөздөр: *математикалык модель, дүң пайда, жабдуулар, ижара, баа, чыгымдар, кызматтар.*

Сформулирована математическая модель задачи определения оптимального размера мастерских под каждый вид оборудования с привлечением арендных строительных площадей. Функция, определяющая валовую прибыль фирмы, зависящая от продажи продукции, произведенной на каждом оборудовании, установленной в мастерских, является линейной. Предложен метод решения задачи. Работоспособность предложенной математической модели демонстрирован тестовым примером.

Ключевые слова: *математическая модель, валовая прибыль, оборудование, аренда, цена, затраты, услуги.*

A mathematical model is formulated for the problem of determining the optimal size of workshops for each type of equipment with the involvement of rental construction areas. The function that determines the gross profit of the firm, depending on the sale of products produced by each equipment installed in the workshops, is linear. A method for solving the problem is proposed. The performance of the proposed mathematical model is demonstrated by a test example.

Key words: *mathematical model, gross profit, equipment, rent, price, costs, services.*

Пусть фирма имеет n разных мастерских, в каждой из которых может установлено k видов оборудований, $k = \{1,2,\ldots,p\}$. Объемы выпуска продукции на единице каждого вида оборудования различны. Фирме известны размеры каждой мастерской и оно равно s_j, j=1, 2,…, n.

Размеры мастерских фирма планирует увеличить, дополнительно взяв на аренду площади для установки оборудования. Увеличение размера мастерских фирма планирует, исходя из своей финансовой возможности. Типы арендуемых площадок для установки оборудования ограничены величиной R_j, j=1, 2,…, n.

Известны объем выпуска продукции за планируемый период выполненной на единице k-го вида оборудования в j-ой мастерской, k=1,2,…, p, j=1, 2,…, n; рыночная реализационная цена единицы веса продукции выполненной на k-ом оборудовании, k=1,2,…, p; затраты идущие на покупку ресурсов для выпуска продукции, выполненной на единице k-го оборудования в j-ой мастерской, j=1, 2, …,n, а также затраты на оплату за услуги для выпуска продукции единицей k-го оборудования в j-ой мастерской, j=1, 2, …, n.

Также известна плата β_j за единицу j-ой арендуемой площади, j=1, 2, …, n.

Требуется определить оптимальные размеры мастерских под каждый вид оборудования так, чтобы получаемая валовая прибыль фирмы была максимальной.

Сформулируем математическую модель задачи.

Введем следующие обозначения:

j - индексы типов мастерских, $j = 1,2,..., n$;

k - индекс видов оборудований, $k=1,2,...,p$;

Известные параметры:

c_{0k} - рыночная реализационная цена единицы веса продукции, выполненной на k-ом оборудовании, $k=1,2,...,p;$

c^1_{jk} – затраты на покупку ресурсов для выпуска продукции на единице k-го оборудовании в j–ой мастерской, $k=1,2,...,p,\ j=1, 2,\ldots, n$;

c^2_{jk} - оплата за услуги для выпуска продукции на единице k -го оборудования в j –ой мастерской, $k=1,2,...,p,\ j=1, 2,\ldots, n$;

b_{jk} – объем выпуска продукции выполненной единицей k -го вида оборудования в j-ой мастерской за планируемый период, $k=1,2,...,p,\ j = 1,2,..., n;$

β_j - плата за единицу j-ой арендуемой площади, $j =1,2,..., n$;

S_j - количество j-го вида мастерских, $j = 1,2,..., n$;

R_j - максимально возможное количество j-го вида арендуемой площади, $j = 1,2,..., n$;

d - финансовая возможность фирмы на оплату арендуемых площадей.

Искомая переменная:

x_{jk} - искомое количество k-го типа оборудования в j-ой мастерской, $k=1,2,...,p,\ j=1,2,\ldots,n$;

y_j - количество арендуемого j-го вида площадей, $j=1,2,\ldots,n$.

Согласно принятым обозначениям математическая модель задачи имеет вид.

Найти максимум

$$L(x,y) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}c_{ok}x_{jk} - \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(c^1_{jk} + c^2_{jk})x_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j \qquad (1)$$

при условиях

$$S_j + y_j = \sum_{k=1}^{p} x_{jk}, \quad j = 1,2,...,n, \qquad (2)$$

$$0 \le y_j \le R_j, \quad j=1,2,...,n, \qquad (3)$$

$$d \ge \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j, \qquad (4)$$

$$x_{jk} \ge 0, \quad j=1,2,...,n, \ k=1,2,...,p, \qquad (5)$$

где $x=\left|x_{jk}\right|_{n,p}$, $y=(y_1, y_2,...,y_n)$.

Экономико-математическую модель задачи (1) - (5) определения оптимального размера мастерских под каждый вид оборудования с привлечением арендных строительных площадей запишем в виде табл. 1, где для компактности записи обозначены через

$$d_{jk} = b_{jk}c_{0k} - (c^1_{jk} + c^2_{jk}), \quad j=1, 2,\ldots, n, \; k=1,2,\ldots,p. \qquad (*)$$

Таблица 1. - Экономико- математическая модель задачи

	x_{11}	…	x_{1p}	x_{21}	…	x_{1p}	…	x_{n1}	…	x_{np}	y_1	y_2	…	y_n		
1	1	…	1		…		…		…				…		=	S_1
2				1		1									=	S_2
…	…	…	…		…		…	…	…	…	…	…	…	…	...	...
n					…		…	1	…	1			…		=	S_n
1					…		…		…		1		…		≤	R_1
2												1	…		≤	R_2
…	…	…	…		…		…	…	…	…	…	…	…	…	...	...
n					…		…		…				…	1	≤	R_n
		…									β_1	β_2	...	β_n	≤	d
	d_{11}	…	d_{1p}	d_{21}	…	d_{2p}	…	d_{n1}	…	d_{np}	$-\beta_1$	$-\beta_2$	...	$-\beta_n$	→	max

Задача (1)-(5) является линейной задачей математического программирования и может быть решена известными методами теории исследования операций в [1] или разработанным в [2] способом.

Рассмотрим пример иллюстрирующий определение оптимального размера мастерских фирмы между видами оборудований для выпуска продукции.

Пример. Пусть фирма имеет 3 типа мастерские, в каждой из которых установлена 4 вида оборудования. Объемы выпуска продукции на единице каждого вида оборудования различны. Размеры каждой мастерской фирмы известно и равно $S_j=\{50, 40, 35\}$.

Фирма планирует расширить размеры мастерских, дополнительно взяв на аренду строительные площади. Расширение размера строительной площади фирма планирует, исходя из своей финансовой возможности, равной $d=105000$ сом. Арендуемые строительные площади для установки оборудования ограничены величиной R_j, $j=1, 2,3,$ т.е. $R_j =\{30, 25, 15\}$.

Известна рыночная реализационная цена за единицу продукции выполненной на k – ом оборудовании, т.е. $c_{0k} =\{150,170,200,250\}$ сомов, объем выпуска продукции (шт) выполненной на единице k –го вида оборудования в j-ой мастерской, т.е.

$$b_{jk} = \begin{bmatrix} 2500 & 2200 & 2000 & 2500 \\ 2000 & 2000 & 2500 & 2000 \\ 2200 & 2400 & 1800 & 2000 \end{bmatrix}.$$

Известны также затраты на покупку ресурсов для выпуска продукции на единице k-го оборудовании в j–ой мастерской c^1_{jk} (в сомах) и оплата за услуги для выпуска продукции на единице k -го оборудования в j –ой мастерской (в сомах), т.е.

$$c^1_{jk} = \begin{bmatrix} 23000 & 15000 & 35000 & 25000 \\ 25000 & 23000 & 33000 & 27000 \\ 35000 & 22000 & 37000 & 30000 \end{bmatrix}, \quad c^2_{jk} = \begin{bmatrix} 19000 & 18000 & 13000 & 20000 \\ 22000 & 20000 & 25000 & 22500 \\ 20000 & 21000 & 22000 & 23700 \end{bmatrix}.$$

Считается известным плата единицы арендуемой строительной площади, т.е. $\beta_j = \{5000;7000;8000\}$ сомов.

Требуется определить оптимальный размер мастерских и размер арендуемой строительной площади под каждый вид оборудования так, чтобы получаемая валовая прибыль фирмы была максимальной.

Вычислим коэффициенты при переменных x_{kj} согласно равенствам (*).

$d_{11} = 433000$; $d_{12} = 341000$; $d_{13} = 352000$; $d_{14} = 580000$;
$d_{21} = 333000$; $d_{22} = 297000$; $d_{23} = 442000$; $d_{14} = 450500$;
$d_{31} = 363000$; $d_{32} = 365000$; $d_{33} = 361000$; $d_{34} = 446300$.

Тогда числовая модель задачи имеет вид.

Найти максимум

$$L(x,y) = 433000x_{11} + 341000x_{12} + 352000x_{13} + 580000x_{14} + 333000x_{21} + + 297000x_{22} + 442000x_{23} + 450500x_{24} + 363000x_{31} + 365000x_{32} + + 361000x_{33} + 446300x_{34} - 5000y_1 - 7000y_2 - 8000y_3 \quad (5)$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{4} x_{1k} = 2 + y_1; \qquad \sum_{k=1}^{4} x_{2k} = 3 + y_2; \qquad \sum_{k=1}^{4} x_{3k} = 1 + y_3; \quad (6)$$

$$y_1 \le 30; \quad y_2 \le 25; \quad y_3 \le 30; \quad (7)$$

$$5000y_1 + 7000y_2 + 8000y_3 \le 105000; \quad (8)$$

$$x_{jk} \ge 0, \quad y_j \ge 0, \quad j=1,2,3, \quad k=1,2,3,4. \quad (9)$$

Условие задачи (5)-(8) можно представить в виде следующей таблицы.

Таблица 2 – Условия задачи

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	y_1	y_2	y_3		
1	1	1	1	1									-1			=	50
2					1	1	1	1						-1		=	40
3									1	1	1	1			-1	=	35
													1			≤	30
														1		≤	25
															1	≤	15
4													-5000	-7000	-8000	≤	105000
	433000	341000	352000	580000	333000	297000	442000	450500	363000	365000	361000	446300	-5000	-7000	-8000	→	max

Задачу (5) -(9) решим с помощью программы разработанной в [2].

В результате решения задачи (5) -(9) получим оптимальное решение:
$X=\{x_{11}=71, \ x_{23}=40, \ x_{31}=35, \ y_1=21\}$ при котором прибыль фирмы составляет $L(x,y)$ = 74715500 сомов.

Из решения следует, что в первой мастерской размером x_{11}=71 кв.м. оборудование отведено для выпуска продукции первого вида и затраты составляют d_{11}=433000 сомов. Во второй мастерской размером x_{23}=40 кв.м. оборудование отведено для выпуска третьего вида строительных продукций и затраты составляют d_{23} = 442000 сомов, в третьей мастерской размером x_{31}=35 кв.м. оборудование отведено для выпуска строительной продукции первого вида и затраты составляют d_{31} = 363000 сомов. В результате у фирмы для выпуска строительных продукций отведено 146 квадратных метров.

Кроме этого фирма, исходя их своей финансовой возможности, расширила мастерские под оборудование на 21 квадратных метров по 5000с.

При таком распределении размеров мастерских на выпуск строительной продукции совместно с приобретаемой площадью фирма имеет максимальную прибыль $L(x,y) =$ 74715500 сомов.

Список литературы

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование [Текст] / Д.Б.Юдин, Е.Г. Гольштейн. - М.: Физмат, 1963.
2. Эшенкулов П. Методика решения задач линейного программирования на компьютере [Текст] / П.Эшенкулов, А. Жусупбаев, Т.Ч. Култаев. - Ош: ОшГУ, 2004. – 60 с.